CÁLCULO L1 — NOTAS DA DÉCIMA QUARTA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Resumo. Nesta aula, faremos alguns exemplos envolvendo a teoria desenvolvida nesta unidade.

Exemplo 1. *Considere a função dada por*

$$f(x) = (X+3)e^{-X}$$

(i) *Determine as assítotas ao gráfico de f, caso existam.*
(ii) *Ache as regiões de crescimento e decrescimento de f.*
(iii) *Encontre as regiões nas quais o gráfico de f é côncavo para cima ou é côncavo para baixo.*
(iv) *Esboce o gráfico de f.*
(v) *Qual o maior valor que f assume?*

(i) Note que o gráfico de f não possui assíntotoas verticais porque f é uma função contínua definida no conjunto do números reais. Vamos determinar as assíntotas horizontais e inclinadas, caso existam, para o gráfico de f. Faremos isto analisando o comportamento de f no infinito. Observe que

$$f(X) = \frac{X+3}{e^X}$$

Pela Regra de L'Hôpital, temos que

$$\lim_{X\to+\infty} f(X) = \lim_{X\to+\infty} \frac{X+3}{e^X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

Portanto, a reta de equação $Y = 0$ é uma assíntota horizontal para o gráfico que $f(X)$ — quando X tende a $+\infty$. Note que o gráfico de f não possui assíntota horizontal ou inclinada, quando $X \to -\infty$, porque

$$\lim_{X\to-\infty} \frac{f(X)}{X} = \lim_{X\to-\infty} \frac{(X+3)e^{-X}}{X} = \lim_{X\to-\infty} \frac{X+3}{X} \lim_{X\to-\infty} e^{-X} = \lim_{X\to-\infty} e^{-X} = +\infty$$

Em particular, $\lim_{X\to-\infty} f(X) = -\infty$.

(ii) Necessitamos analisar o sinal da primeira derivada de f

$$f'(X) = e^{-X} + (X+3)(-1)e^{-X} = -(X+2)e^{-X}$$

Note que $X = -2$ é o único ponto crítico de f porque e^{-X} é sempre positiva. Mais ainda, o sinal de $f'(X)$ coincide com o de $-(X+2)$ e daí

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline \nearrow & -2 & \searrow \end{array} \quad \text{sinal de } f'(X)$$

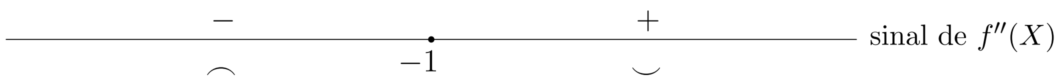
Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

Portanto, f é crecente no intervalo $(-\infty, -2]$ e decrescente no intervalo $[-2, +\infty)$. Note que $X = -2$ é um ponto de máximo absoluto para $f(X)$. Logo o maior valor que $f(X)$ assume é $f(-2) = e^2$, que é a resposta do item (v).

(iii) A concavidade do gráfico de f é determinada a partir do sinal da derivada segunda de f. Temos que:

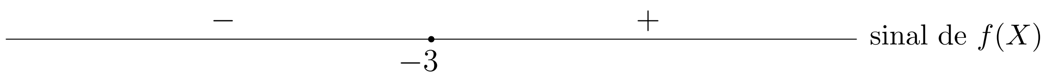
$$f''(X) = -e^{-X} - (X+2)(-1)e^{-X} = (X+1)e^{-X}$$

Como e^{-X} é sempre positivo, o sinal de $f''(X)$ é

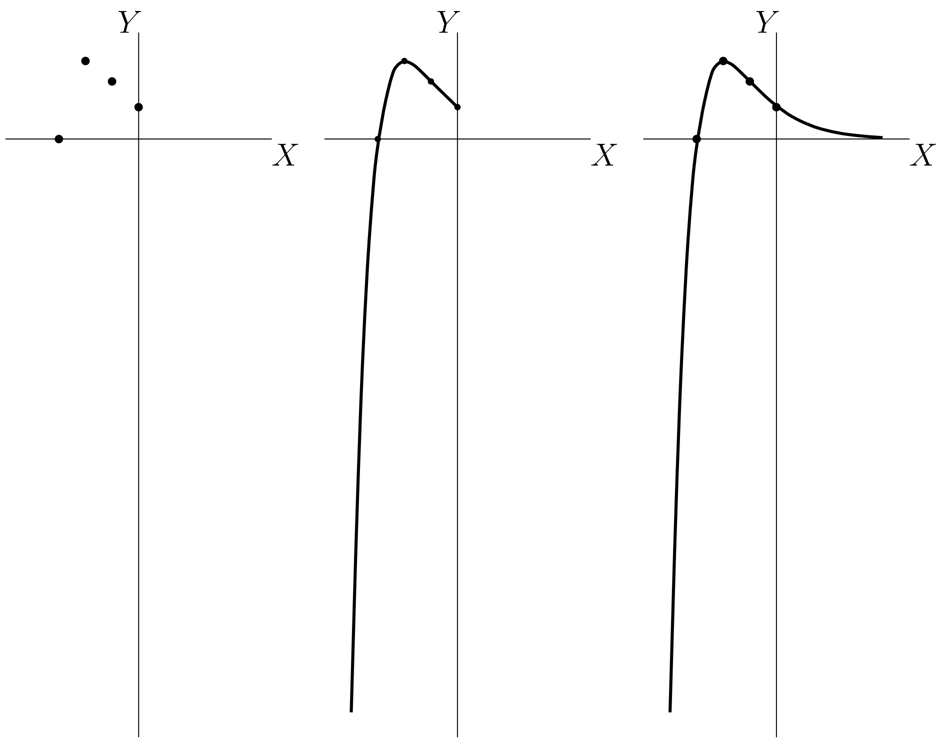


Conseqüentemente o gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(-\infty, -1]$ e côncavo para cima no intervalo $[-1, +\infty)$. Logo $X = -1$ é seu único ponto de inflexão.

(iv) Auxilia no esboço do gráfico o conhecimento do sinal de $f(X)$, bem como a sua raiz:



Nas figuras seguintes apresentamos a construção do gráfico de f em três etapas. A escala do eixo dos abscissas é $2,5$ vezes o das ordenadas.



Na primeira figura, da esquerda para a direita, marcamos os pontos notáveis, que são: as interseções com os eixos, os pontos críticos e os pontos de inflexão.

Na segunda figura, esboçamos o gráfico no intervalo $(-\infty, -1]$, que é côncavo para baixo. Neste intervalo, a função cresce até $X = -2$ e a partir deste ponto decresce.

Na terceira figura fazemos o gráfico no intervalo $[-1, +\infty)$, que é côncavo para cima. Neste intervalo, a função é sempre decrescente, positiva e tende para 0 quando a variável tende a $+\infty$.

Exercício 2. *Considere a função dada por*

$$f(X) = (X^2 + X + 1)e^{-X}$$

(i) *Determine as assítotas ao gráfico de f, caso existam.*
(ii) *Ache as regiões de crescimento e decrescimento de f.*
(iii) *Encontre as regiões nas quais o gráfico de f é côncavo para cima ou é côncavo para baixo.*
(iv) *Esboce o gráfico de f.*
(v) *Qual o menor valor que f assume?*

Exemplo 3. *Mostre que, para todo número real X,*

$$e^X \geq X + 1 \tag{1}$$

Mais ainda, a igualdade em (1) ocorre se e somente se $X = 0$.

Vamos considerar a função

$$f(X) = e^X - (X + 1) = e^X - X - 1$$

Será suficiente mostrar que $f(X)$ possui um mínimo absoluto para $X = 0$ porque, neste caso,

$$f(X) \geq f(0)$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} e^X - (X + 1) &\geq 0 \\ e^X &\geq X + 1 \end{aligned}$$

Necessitamos analisar o sinal da derivada de $f(X)$ para determinar as regiões de crescimento e decrescimento de $f(X)$. Como

$$f'(X) = e^X - 1$$

temos que

$$\begin{array}{ccccl} - & & + & & \\ \hline & 0 & & & \text{sinal de } f'(X) \\ \searrow & & \nearrow & & \end{array}$$

Isto é, a função $f(X)$ é decrescente até $X = 0$ e a partir deste valor passa a ser crescente. Portanto, $X = 0$ é um ponto de mínimo absoluto para $f(X)$, como desejávamos estabelecer. Como $X = 0$ é o único ponto de mínimo absoluto para esta função, a igualdade em (1) ocorre apenas para $X = 0$.

Exercício 4. *Usando o exemplo anterior, mostre que, para todo X positivo,*

$$e^X > 1 + X + \frac{X}{2}$$

Exemplo 5. *Para um número real positivo a, determine o número de soluções X, nos números reais positivos, para a equação*

$$X^a = a^X \tag{2}$$

Note que $X = a$ é uma solução de (2). Será que existe mais soluções? Sim. Por exemplo, para $a = 4$, temos $X = 2$, porque $2^4 = 4^2 = 16$. Além de $X = 2$ e $X = 4$, existe uma outra solução para (2) quando $a = 4$? Mostraremos que não.

Tomando o logaritmo neperiano em ambos os lados de (2), temos que

$$\ln\left(X^a\right) = \ln\left(a^X\right) \tag{3}$$

Note que podemos recuperar (2) a partir de (3) — basta tomarmos a exponencial na base e em ambos os lados da igualdade. Portanto, estas duas equações possuem as mesmas soluções. Podemos reescrever (3) como

$$a \ln X = X \ln a$$

e conseqüentemente como

$$\frac{\ln X}{X} = \frac{\ln a}{a} \tag{4}$$

Logo (2) e (4) possuem exatamente as mesmas soluções. Necessitamos estabelecer apenas o número de soluções para a equação (4).

Considere a função f, definida para todo número real positivo, dada por

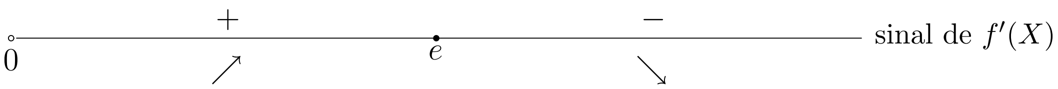
$$f(X) = \frac{\ln X}{X}$$

As soluções de (4) são as abscissas dos pontos de interseção do gráfico de $f(X)$ com a reta horizontal dada por $Y = f(a)$. Portanto, o número de soluções de (2) é igual ao número de interseções do gráfico de $f(X)$ com a reta horizontal $Y = f(a)$. Para contar estes pontos vamos esboçar o gráfico de $f(X)$.

Primeiro, determinamos os intervalos de crescimento de f. Pela regra do quociente,

$$f'(X) = \frac{1 - \ln X}{X^2}$$

Portanto, como o denominador de $f'(X)$ é sempre positivo, o sinal de $f'(X)$ coincide com o sinal de $1 - \ln X$, que é



Logo $f(X)$ é crescente no intervalo $(0, e]$ e decrescente no intervalo $[e, +\infty)$.

Agora, consideraremos a concavidade do gráfico de $f(X)$. Mais uma vez, pela regra do quociente,

$$f''(X) = \frac{-X - (1 - \ln X)2X}{X^4} = \frac{2\ln X - 3}{X^3}$$

Note que o denominador de $f''(X)$ é sempre positivo porque X é um número real positivo. Logo o sinal de $f''(X)$ coincide com o de $2\ln X - 3$, que é

Conseqüentemente o gráfico de $f(X)$ é côncavo para baixo no intervalo $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right]$ e para cima em $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

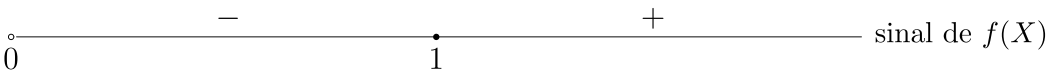
Observe que

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{\ln X}{X} = -\infty$$

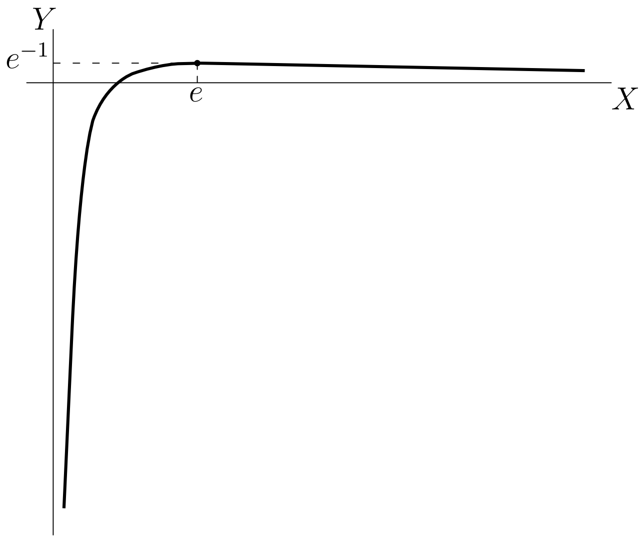
e que, pela Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{X\to +\infty} \frac{\ln X}{X} = \lim_{X\to +\infty} \frac{\frac{1}{X}}{1} = \lim_{X\to +\infty} \frac{1}{X} = 0$$

Finalmente, analisaremos o sinal de $f(X)$,



A partir de toda a inforação apresentada anteriormente, podemos esboçar o gráfico de $f(X)$, que é apresentado na figura seguinte:



A reta horizontal de equação $Y = f(a)$ intercepta o gráfico de $f(X)$ em exatamente:

- 1 ponto quando $0 < a \leq 1$ ou $a = e$.
- 2 pontos quando $1 < a < e$ ou $e < a$.

Conseqüentemente a equação (2) possui uma única solução, que é $X = a$, quando $0 < a \leq 1$ ou $a = e$; e possui exatamente duas soluções quando $1 < a < e$ ou $e < a$.

Exercício 6. *Considere a função, cujo domínio é o conjunto dos números reais positivos, dada por*

$$f(X) = X \ln^2 X$$

(i) *Ache as regiões de crescimento e decrescimento de f.*
(ii) *Encontre as regiões nas quais o gráfico de f é côncavo para cima ou é côncavo para baixo.*
(iii) *Calcule os limites $\lim_{X\to 0^+} f(X)$ e $\lim_{X\to +\infty} f(X)$.*
(iv) *Esboce o gráfico de f.*
(v) *A função f assume um valor máximo ou um valor mínimo?*
(vi) *É possível definir um valor para $f(X)$ em $X = 0$ de forma que a função seja contínua neste ponto? Em caso afirmativo, qual é este valor?*

Exemplo 7. *Considere a função dada por*

$$f(X) = X + 3X^{\frac{2}{3}}$$

(i) *Ache as regiões de crescimento e decrescimento de f.*
(ii) *Encontre as regiões nas quais o gráfico de f é côncavo para cima ou é côncavo para baixo.*
(iii) *Esboce o gráfico de f.*

(i) Temos que

$$f'(X) = 1 + 2X^{-\frac{1}{3}} = \frac{X^{\frac{1}{3}} + 2}{X^{\frac{1}{3}}}$$

Para a análise do sinal de $f'(X)$, utilizaremos a fração à direira desta identidade como representação para $f'(X)$. Note que

- O denominador da fração é positivo quando $X > 0$ e negativo quando $X < 0$.
- O numerador da fração é positivo quando $X > -8$ e negativo quando $X < -8$.

Caso o numerador e o denominador da fração possuam o memo sinal, o quociente é positivo, isto é, o sinal de $f'(X)$ é positivo. Isto ocorre quando X pertence aos intervalos $(-\infty, -8)$ e $(0, +\infty)$. Quando possuem sinais diferentes, o sinal de $f'(X)$ é negativo, e isto ocorre quando X está no intervalo $(-8, 0)$. Em resumo:

$+$		$-$		$+$	sinal de $f'(X)$
$\nearrow$	-8	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Conseqüentemente f é crescente nos intervalos $(-\infty, -8]$ e $[0, +\infty)$ e decrescente no intervalo $[-8, 0]$.

(ii) Temos que

$$f''(X) = -\frac{2}{3}X^{-\frac{4}{3}}$$

Portanto,

$+$		$-$	sinal de $f''(X)$
$\smile$	0	$\frown$	

Logo o gráfico de $f(X)$ é côncavo para cima no intervalo $(-\infty, 0]$ e côncavo para baixo no intervalo $[0, +\infty)$.

(iii) Antes de esboçar o gráfico de $f(X)$, vamos estudar o seu comportamento no infinito. Observe que

$$\lim_{X\to+\infty} f(X) = \lim_{X\to+\infty} X + 3X^{\frac{2}{3}} = \lim_{X\to+\infty} X\left(1 + \frac{3}{X^{\frac{1}{3}}}\right) = \lim_{X\to+\infty} X = +\infty$$

De maneira análoga, estabelecemos que

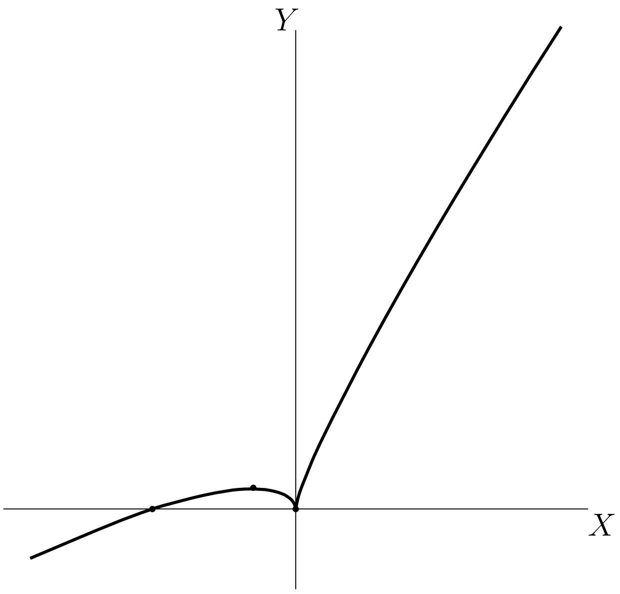
$$\lim_{X\to-\infty} f(X) = -\infty$$

Por fim, faremos a análise do sinal de $f(X)$. Note que

$$f(X) = X + 3X^{\frac{2}{3}} = X^{\frac{2}{3}}\left(X^{\frac{1}{3}} + 3\right)$$

Como o sinal de $X^{\frac{2}{3}}$ é sempre positivo, exceto em $X = 0$, onde o valor desta expressão vale 0, o sinal de $f(X)$, para $X \neq 0$, coincide com o de $X^{\frac{1}{3}} + 3$, que é positivo para $X > -27$ e negativo para $X < -27$. Em particular, a função contínua $f(X)$ possui duas raízes, que são $X = -27$ e $X = 0$. Apenas em $X = -27$ ocorre uma mudança de sinal de $f(X)$.

Na próxima figura apresentamos o gráfico de $f(X)$, quando X percorre o intervalo $[-50, 50]$. Destacamos os seus 3 pontos notáveis (raízes, máximo local e inflexão — que coincide com uma das raízes).

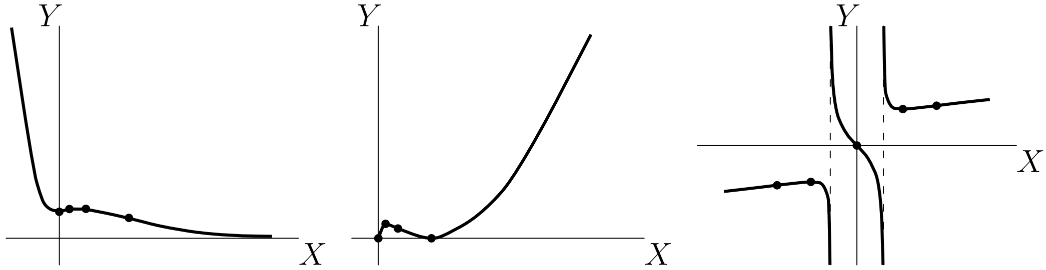


Exercício 8. *Considere a função dada por*

$$f(X) = \frac{X}{\sqrt[3]{X^2 - 1}}$$

(i) *Determine as assítotas ao gráfico de f.*
(ii) *Ache as regiões de crescimento e decrescimento de f.*
(iii) *Encontre as regiões nas quais o gráfico de f é côncavo para cima ou é côncavo para baixo.*
(iv) *Esboce o gráfico de f.*

1. Respostas dos exercícios



2. (i) $Y = 0$ (ii) decresce em $(-\infty, 0]$ e $[1, +\infty)$ e cresce em $[0, 1]$ (iii) côncavo para cima em $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$ e $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ e para baixo em $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ (iv) gráfico à esquerda na figura anterior — com pontos notáveis assinalados (v) 1 **6.** (i) decresce em $[e^{-2}, 1]$ e cresce em $(0, e^{-2}]$ e $[1, +\infty)$ (ii) côncavo para cima em $(0, e^{-1}]$ e para baixo em $[e^{-1}, +\infty)$ (iii) 0 e $+\infty$ respectivamente (iv) gráfico do meio na figura anterior, tendo seus pontos notáveis assinalados — este é o gráfico da função estendida para a qual $f(0)$ é definido como sendo 0 — a escala do eixo das abscissas é o dobro do das ordenadas (v) mínimo: 0; máximo: não existe (vi) sim: $f(0) = 0$ **8.** (i) $X = -1$ e $X = 1$ (ii) decrescente em $[-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$ e $(1, \sqrt{3}]$ e cresce em $(-\infty, -\sqrt{3}]$ e $[\sqrt{3}, +\infty)$ (iii) côncavo para cima em $(-\infty, -3]$, $(-1, 0]$ e $(1, 3]$ e para baixo em $[-3, -1)$, $[0, 1)$ e $[3, +\infty)$ (iv) gráfico à direita na figura anterior — com pontos notáveis assinalados

Conteúdo da décima quarta aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos